

## RESUMEN ESTRATÉGICO PARA EL ALUMNO

1. **Coordenadas  $[v]_B$ :** Son los escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  tales que  $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots$ . Representan la "receta" para armar el vector usando los elementos de la base  $B$ .
2. **Matriz de Cambio de Base ( $P_{C \leftarrow B}$ ):** Es una matriz que traduce las coordenadas de un vector de una base  $B$  a otra base  $C$ . Se cumple que:  $[v]_C = P_{C \leftarrow B} \cdot [v]_B$ .
3. **Teorema de Grassmann:** Para dos subespacios  $S$  y  $W$  de un espacio  $V$ :

$$\dim(S + W) = \dim(S) + \dim(W) - \dim(S \cap W)$$

4. **Teorema del Rango-Nulidad:** Para una matriz  $A$  de  $m \times n$ :

$$\text{rango}(A) + \text{nulidad}(A) = n \text{ (número de columnas)}$$

Halle el vector de coordenadas  $[v]_B$  solicitado.

1. En  $\mathbb{R}^2$ , halle  $[v]_B$  para  $v = (1, 2)$  y la base  $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ .
2. En  $\mathbb{R}^3$ , halle  $[v]_B$  para  $v = (1, 0, 1)$  y la base  $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ .
3. En  $P_2$  (polinomios), halle las coordenadas de  $p(x) = 3x^2 - 2x + 5$  respecto a la base estándar  $E = \{1, x, x^2\}$ .
4. En  $P_1$ , halle  $[p]_B$  para  $p(x) = 2x + 1$  respecto a la base  $B = \{x + 1, x - 1\}$ .
5. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ , halle sus coordenadas respecto a la base estándar de  $M_{2 \times 2}$ .

Determine las matrices de transición y utilícelas para transformar coordenadas.

6. Halle la matriz de transición  $P_{E \leftarrow B}$  de la base  $B = \{(2, 3), (1, 2)\}$  a la base estándar  $E$  de  $\mathbb{R}^2$ .
7. Dadas  $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$  y  $C = \{(1, 1), (1, -1)\}$ , halle  $P_{C \leftarrow B}$ .
8. Si la matriz de cambio de base  $P_{C \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  y sabemos que  $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ¿cuáles son las coordenadas de  $v$  en la base  $C$ ?
9. Demuestre que  $P_{B \leftarrow C} = (P_{C \leftarrow B})^{-1}$ .
10. En  $P_2$ , halle la matriz de cambio de base de  $B = \{1, x, x^2\}$  a  $C = \{1, x - 1, (x - 1)^2\}$

Aplique la fórmula de Grassmann para analizar subespacios.

- Sean  $S$  y  $W$  subespacios de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\dim(S) = 2$ ,  $\dim(W) = 2$  y la intersección es una recta, ¿cuál es la dimensión de  $S + W$ ?
- En  $\mathbb{R}^4$ , sean  $S = \{(x, y, z, w) \mid x + y = 0, z + w = 0\}$  y  $W = \{(x, y, z, w) \mid x - y = 0\}$ . Halle  $\dim(S)$ ,  $\dim(W)$  y  $\dim(S + W)$ .
- Demuestre que si  $\dim(S) + \dim(W) > \dim(V)$ , entonces la intersección  $S \cap W$  no puede ser solo el vector nulo.
- Sea  $V = M_{2 \times 2}$ . Sea  $S$  el conjunto de matrices simétricas y  $W$  el de matrices antisimétricas. Halle  $\dim(S)$ ,  $\dim(W)$  y  $\dim(S \cap W)$ . Verifique Grassmann.
- Si  $S$  y  $W$  son planos en  $\mathbb{R}^3$  que pasan por el origen, ¿cuáles son las dimensiones posibles para  $S \cap W$ ?

Relacione las dimensiones del espacio columna y el espacio nulo.

- Una matriz  $A$  de  $4 \times 7$  tiene rango 3. ¿Cuál es la dimensión de su espacio nulo (nulidad)?
- Halle una base para el espacio nulo de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  y verifique el teorema de la dimensión.
- Si el sistema  $Ax = 0$  tiene solo la solución trivial y  $A$  es una matriz de  $5 \times 5$ , ¿cuál es el rango de  $A$ ?
- ¿Puede una matriz de  $3 \times 5$  tener una nulidad igual a 1? Justifique su respuesta.
- Explique la relación entre el rango de una matriz y el número de variables libres en su forma escalonada reducida.
- Rotación:** Halle la matriz de cambio de base en  $\mathbb{R}^2$  que corresponde a una rotación de los ejes coordenados en un ángulo de  $45^\circ$ .
- Interpolación:** Use el cambio de base en polinomios para explicar por qué cualquier polinomio de grado 2 puede escribirse en la forma  $a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$ .
- Sistemas Dinámicos:** Si una matriz de transición representa el cambio de estado de un sistema, ¿qué significa que un vector de coordenadas sea igual en ambas bases?
- Codificación:** Represente una letra como un vector en una base estándar y cámbiela a otra base como método simple de cifrado.
- Proyecciones:** Si proyectamos  $\mathbb{R}^3$  sobre un plano, ¿qué sucede con la dimensión según el teorema del rango-nulidad?